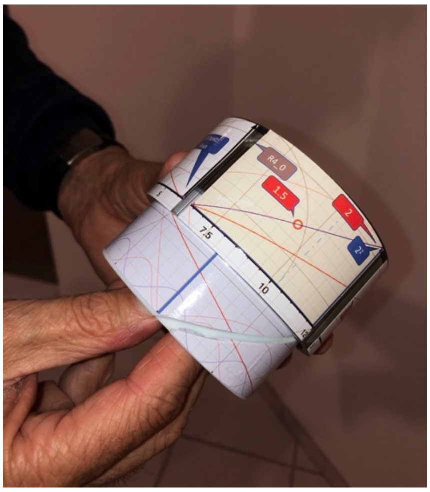
Die Eulerrolle

Ein didaktisches Hilfsmittel für einen leichteren Zugang zu mathematischen Zusammenhängen

Hanspeter Zehnder



Version 250324-av-hpz

1. Einleitung

Die Eulerrolle ist ein didaktisches Hilfsmittel für den Mathematikunterricht und wurde von Zehnder Bildungsprojekte zur mathematischen Modellierung sicherheitsrelevanter Prozesse entwickelt *(Patent Nr. CH716934, https://patentscope.wipo.int/search/de)*.
Die Bezeichnung Eulerrolle bezieht sich auf die besondere Geometrie des Objektes
Die Radiuslänge sowie die Höhe dieses Zylinders repräsentiert eine skalierte Länge $\frac{e}{e} = 1$

Zahlen und Mathematik spielen in unserem Alltag eine wichtige Rolle und bilden oft die Grundlage für Entscheidungen, die unser Leben stark beeinflussen können.
Eine Zahl ist jedoch ein abstrakter Begriff. Umgangssprachlich wird eine Zahl oft als Menge verstanden, zum Beispiel 7 Äpfel. Eine Zahl kann aber auch eine ergänzende Beschreibung zu einem Objektzustand sein. So kann z.B. ein Apfel mit $7\left[\frac{m}{s}\right]$ von einem Punkt A nach B fliegen oder $7\left[\frac{m}{s^2}\right]$ beschleunigt werden. Gemeinsam an diesen Beschreibungen ist, dass mit einer Zahl eine objektive Aussage über ein Objekt, über eine Eigenschaft oder Zustand möglich ist. Für soziale Wesen ist vermutlich ein objektives Wertesystem Voraussetzung für ein erfolgreiches Zusammenleben. Ein nachhaltiges Fortbestehen setzt ein Nehmen und Geben und somit wohl eine minimale Gerechtigkeit voraus. Wenn z.B. in einem Unternehmen Leistung nicht gerecht belohnt wird, führt dies zu Unzufriedenheit und in der Folge zu Kündigungen oder anderen unerwünschten Reaktionen. Ob dies auch für eine Mutter-Kind-Beziehung gilt, lässt sich aber wohl eher philosophisch beantworten. Eine mathematische Herausforderung ist jedoch der Anspruch, dass Objekt, Zustände oder Eigenschaften exakt bewertet werden können. Dazu braucht man so etwas wie eine Zahl, die man addieren und multiplizieren kann und welche auch einen objektiven Vergleich ermöglicht. Um das zu ermöglichen, werden Zahlen im Alltag in Verbindung mit Einheit benutzt, zum Beispiel 1 Meter oder 1 Sekunde. Anstelle von Einheiten können auch Begriffe verwendet werden, wobei diese in der Regel nicht so präzise definiert sind wie Einheiten. Eine Zahl und eine Einheit ermöglichen aber noch keine Wertung. Mit einer Länge $4[m]$ kann man zwar eine Grenzlänge bestimmen aber auf einer Länge lässt sich nichts bepflanzen, dazu braucht es eine Fläche. Schon konkreter ist die Aussage $1[m^2]$, das ist eine Fläche mit einer Umfanglänge von z.B. $4[m]$. Topologisch *(Fachgebiet der Mathematik)* ist eine solche Fläche ein Objekt mit einem Rand. Ein solches Objekt lässt sich umformen und ihm kann ein Attribut zugeschreiben werden, zum Beispiel eine Objektgrösse k oder n oder auch ein Objektwert von100 Franken. Mit dieser Zuschreibung wird das Objekt vergleichbar. Daraus könnte man schliessen, dass $100[m^2]$ 10'000 Franken kosten, was aber auch nicht zwingend richtig ist. $100[m^2]$ könnte ja auch eine 1 Kilometer lange Rechteckfläche mit10 cm Breite sein. Diese Fläche wäre praktisch nutzlos. Die Objektzahl $1m^2$ ist also noch keine hinreichende Information für eine Wertangabe, diese Zahl enthält nur die Information, dass es ein zweidimensionales Objekt $(n^{2)}$ gibt. In einem endlichen System *(begrenzte Grösse)* muss dieses Objekt auch einen Rand haben, wobei der der Rand auch wieder ein Objekt ist, aber mit der kleineren Potenz $n^{(2-1)}$ *(Definition Topologie)*. In Analogie zu diesem Flächenobjekt enthält die kubische Zahl 1^3 die Aussage, dass es ein dreidimensionales Objekt mit einem zweidimensionalen Rand gibt. Wird zu dieser Zahl 1^3 keine Einheit angegeben, kann daraus wenig abgeleitet werden. Selbst die Aussage, dass es sich dabei um einen geometrischen Körper handelt, ist nur eine These. Genauso kann es sich bei einem dreidimensionalen Objekt auch um einen rotierenden Vektor handeln, der mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi f$ um einen Kreismittelpunkt rotiert. In diesem Fall lässt sich die Zahl 1^3 in ein Produkt $l\ x\ b\ x\ t = \vec{v} \cdot t = 2 \cdot \pi \cdot 1\left[\frac{ms}{s}\right]$ zerlegen, wobei dieses Produkt die Tangentialgeschwindigkeit der Vektorspitze angibt.

Wenn mit einer Zahl ein Objekt beschrieben wird, welches sich bewegt, dann kann man von einem Raum-Zeit-Objekt sprechen und damit ist man definitiv mit abstrakten Zahlen konfrontiert. Bereits der Begriff «Raum» wird Umgangssprachlich als 3D-Körper interpretiert. Topologisch wird dieser Begriff nicht so verwendet, stattdessen spricht man von Dimension welche als Richtung definiert sind. So gesehen ist ein Vektor, welcher genau eine Richtung aufweist, als eindimensionales Objekt definiert. Ein Würfel kann mit den drei Koordinaten x, y und z als 3D-Raumobjekt definiert werden. Topologisch kann aber auch ein Viereck, bestehend aus Seiten*vektoren* mit unterschiedlichen Richtungen, auch ein 3D-Objekt sein. Sobald ein Objekt ein Längenanteil besitzt, ist das toplogisch ein Raumobjekt. Fehlt jedoch die Raumdimension, handelt es sich nicht mehr um ein vollständiges Objekt, es zerfällt in eine Zeitdimension. Werden Zahlen mit Raum- und Zeit-Einheiten verknüpft, betreibt man aber Physik und man ist im täglichen Umgang mit Zahlen angekommen. Bei unseren alltäglichen Entscheidungen machen wir uns aber in der Regel keine Gedanken darüber, ob es sich um ein 4, 5 oder 10-dimensionales Problem handelt, weil wir viele Entscheidungen gefühlsmässig treffen können. Wenn wir unsicher sind, fragen wir vielleicht noch eine nahestehende Person oder wir holen eine Expertenmeinung ein. Eher selten transformieren wir eine Fragestellung in eine mathematische Formulierung, auch wenn dieser Ansatz die exakteste Methode ist. Wird jedoch eine möglichst präzise Antwort gefordert, dann liefert die mathematische Formulierung die verlässlichste Antwort. Präzise Antwort werden z.B. bei sicherheitsrelevanten Anwendungen erwartet. Für die Zulassung einer automatischen Zuglenkung muss ein Hersteller daher nachweisen, wie sicher und verlässlich sein System ist. Antworten wie «ziemlich sicher» müssen mit Zahlen hinterlegt sein und nachvollzogen werden können. Im Alltag nehmen wir es oft nicht so genau. Schnell trauen wir uns zu, komplexe Zusammenhänge einschätzen zu können, ohne eine Vorstellung darüber zu haben, welche Komplexität *(Dimensionalität)* hinter einer Fragestellung steckt. Dabei haben wir heute wie keine Generation vor uns die Möglichkeit, in kurzer Zeit auf sehr viel Wissen zuzugreifen, und der Bildungsstand ist besser als je zuvor. Leider nutzen wir diesen Vorteil nur teilweise. Wir können sogar beobachten, dass wissenschaftliche Erkenntnisse negiert werden und es politisch legitim geworden ist, auch komplexe Entscheidungen auf Thesen zu stützen, die nachweislich falsch sind.

Dies sollte uns jedoch nicht davon abhalten, die zu lösenden Herausforderungen weiterhin auf wissenschaftliche Erkenntnisse zu stützen und sorgfältige Grundlagen zu erarbeiten, damit falsche Behauptungen für möglichst viele Menschen offensichtlich werden.

Hilfreich kann dabei ein einfaches Modell sein, mit dem sich grundlegende Zusammenhänge verständlich darstellen lassen. Einen Beitrag dazu, sollte das Modell Eulerrolle liefern können. Der Ursprung zu dieser Entwicklung geht auf eine Sicherheitsfrage aus der Bahntechnik zurück. Wenn wir über sichere Systeme sprechen, setzt das einen Konsens voraus, was wir unter Sicherheit verstehen. Gelingt es, eine solche Frage mit einer Zahl quantifizieren zu können, haben wir zumindest eine gemeinsame Ausgangslage, um eine zielführende Diskussion über «Sicherheit» führen zu können.

Ein solche Quantifizierbarkeit ist möglich, indem eine Zahl einem Objekt zugeordnet werden kann, aus dessen Informationsgehalt sich noch weitere Eigenschaften ableiten können. Dazu braucht es verschiedene Dimensionen, weil solche Objekt Funktionen aufweisen müssen, welche Vergleiche mit äussert stabilen und sicheren Situationen ermöglichen. Das ist ein Wertevergleich, also etwas, was wie täglich mit Zahlen machen. So kann der Wert eines Objektes «Stuhl» mit dem Wert eines Objekts «Banknote» verglichen werden und dem Stuhl kann ein Wert von z.B. 80 Franken zugeordnet werden. Entsprechend lässt sich auch eine Objektsicherheit definieren, die als Zustand oder Vorhandensein zu einem bestimmten Zeitpunkt definiert werden kann. So muss eine Prognose möglich sein, wo sich ein Objekt in einer Stunde befinden wird. Allerdings stützt sich eine solche Aussage auf verschiedene

Randbedingungen wie z.B. *Geschwindigkeit* und *Wegprofil*. Solche Abhängigkeiten führen dazu, dass keine einfachen Aussagen mehr möglich sind, in einem solchen System gibt es Rückkopplungen, die zu Überlagerungen führen können, die keine präzisen Aussagen mehr zulassen. Ein Zug kommt z.B. nur dann sicher an einem Ort x an, wenn auf der gesamten Strecke keine sicherheitsrelevanten Störungen auftreten können. Dabei ist die Anzahl der möglichen Störungen systemabhängig. So sind bei einer automatisierten Autofahrt die zu beachtenden Randbedingungen wesentlich komplexer als beim automatisierten Bahnverkehr. Generell kann gesagt werden, dass durch eine Komplexitätsreduktion Prognosen einfacher und damit auch verlässlicher werden. Die Frage ist aber, ob durch eine solche Reduktion ein System nur skaliert wird *(massstäblich verkleinert)* oder ob ein System reduziert wird, indem Funktionen entfernt werden *(entfernen von Systemfunktionen).* Mathematisch handelt es sich beim ersten Fall um eine Division, d.h. alle Dimensionen werden nur verkleinert aber nicht verändert *(aus Meter werden Millimeter aber niemals Sekunden).* Im zweiten Fall handelt es sich um eine Subtraktion *(System-Subelemente werden entfernt).* Bei der Modellierung bleiben also alle Systemeigenschaften erhalten, solange keine Subtraktionen stattfinden, aber das Systemverständnis wird dadurch auch nicht vereinfacht. Die Kunst der Modellierung besteht darin, die Komplexität zu reduzieren und gleichzeitig die wesentlichen Eigenschaften eines Systems zu erhalten. Dies erreicht man, indem man von einer Funktion *(zum Beispiel von einer Gausskurve)* nicht einfach die Hälfte aller Punkte entfernt, sondern nur jeden zweiten Punkt. Dadurch bleibt die Hüllkurve *(Form)* erhalten, aber die Auflösung halbiert sich, was irrelevant ist, solange nach der Reduktion noch genügend Punkte vorhanden sind. Bleiben aber am Ende jedoch nur noch 4 Punkte übrig, dann hat man zu stark reduziert und die Gausskurve degradiert zu einer geknickten Linie. Ideal ist ein Skalierungsfaktor welcher Detailinformationen ignoriert aber die wesentlichen Eigenschaften des Originals noch darstellen kann *(Beispiel: Eine Autokarte beinhaltet Informationen über Strassen, aber Wanderweg-Informationen fehlen).* Eine Modellierung ermöglicht eine Mustererkennung und genau das ist Mathematik. Damit befassen sich aber auch viele andere Disziplinen, zum Beispiel auch die Psychologie. In diesem Bereich erfolgt die Mustererkennung jedoch durch Beobachtungen, weil viele Prozesse so komplex sind, dass sie sich mathematisch nicht mehr beschreiben lassen. Jede Mustererkennungsmethode setzt aber Professionalität voraus. So muss auch der Beobachter viele Verhaltensmuster gut kennen, um eine Auffälligkeit erkennen und zuordnen zu können. Bei jeder Mustererkennung besteht die Gefahr, dass Dimensionen miteinander verglichen werden, welche gar nicht vergleichbar sind was zu gravierenden Fehlinterpretationen führt. *In der Mathematik verwendet man dazu Operationsregeln (Bsp: Keine Division 1:0)* Regeln gelten natürlich auch in der Psychologie, aber wenn man sie nicht kennt, sollte man Diagnosen wohl besser den Experten überlassen.

Komplex sind auch technische Sicherheitssysteme. In diesem Bereich stützt man sich auf mathematische Mustererkennungen. So kann nachgewiesen werden, dass Computersysteme mit sehr hoher Verlässlichkeit *(Sicherheit)* Prozesse umsetzten können. Besonders im Vergleich zum Menschen ist die Fehlerquote eines Computers um Potenzen besser, solange es sich um definierbare Regelprozesse handelt? Hier kann man sich sogar die Frage stellen, ob ein solches System, das nur zwischen 1 und 0 unterscheiden kann, nicht Fehlerfreiheit garantieren kann? Vordergründig lässt sich somit jede Software maximal reduzieren, womit auch jede Software eindeutig prüfbar ist *(System mit definierbaren Abweichung 0 und 1).*

Solche Forderungen lösen grundsätzliche Fragen aus und lassen sich nicht damit beantworten, dass jeder Rechner absolut zuverlässig zwei Zahlen addiere oder multiplizieren kann. Computerprogramme sind keine statischen Objekte und daher lässt sich die Zeit aus einer Computeranwendung nicht heraus kürzen. Wird eine Aufgabe sehr komplex, muss ein Computer auch sehr viele Daten auswerten können *(sehr grosse Zahlen).* Wird dann noch gefordert, dass die entsprechenden Ergebnisse sehr schnell vorliegen, hat jeder Computer schnell auch ein Auflösungsproblem. Wie in weiteren Aufsätzen noch gezeigt wird, versteckt sich hinter jeder Zeiteinheit die Zahl π und kein Computer kann diese Zahl genau darstellen. Rundungsfehler gehören daher auch zur DNA eines Computers. Damit stösst man auch zu Grundsatzfragen der Zahlentheorie und zu scheinbar einfachen Fragen wie «was ist überhaupt die Zahl π oder die Zahl π^2 und dann stellt man fest: π^2 gehört zu den ungelösten Fragen der Mathematik. An dieser Stelle kann bereits verraten werden, dass auch eindimensionale Objekte ungelöste Fragen verbergen. Jede Primzahl bildet ein eindimensionales Objekt ab, da ja ein ganzzahliges Produkt $a \cdot b$ Nichtprim ist. Topologisch ist jede Linie ein eindimensionales Objekt und dazu gehört z.B. auch eine gekrümmte Bogenlinie. Ein eindimensionales Objekt ist auch ein Vektor, der durch eine bestimmte Länge und Richtung charakterisiert ist. Um eine Bogenlänge mit Vektoren genau abbilden zu können, benötigt man in einem endlichen System sehr viele aber sehr kleine eindimensionale Vektoren, damit die Vektorsumme eine Bogenlinie möglichst fehlerfrei repräsentieren kann. Bei einem Kreisbogen weist dabei jeder Vektor eine andere Richtung (Dimension) auf. Um solche Zusammenhänge genau zu verstehen, eignet sich ein Modell, das z.B. den Unterschied zwischen einer Vektoraddition und einer Vektormultiplikation anschaulich darstellen kann. Mit dem Objekt «Eulerrolle» lassen sich solche Grundlagen der Mathematik erklären, auch komplexe Operationen der höheren Mathematik werden damit leichter verständlich. Die Eulerrolle eignet sich daher auch als didaktisches Hilfsmittel für den Mathematikunterricht. Dazu gehört auch ein leichterer Zugang zu Primzahlen und andere besonderen Zahlen wie e und π, sowie allgemein ein leichterer Verständnis zu verschiedenen Fachbereichen der Mathematik.

2. Geometrischer Aufbau der Eulerrolle

Die Eulerrolle ist ein zweiteiliger Körper, bestehend aus einem Zylinderunterteil und einem abschraubbaren Zylinderoberteil, die über eine Schraubenlinie mit der Steigung $m = \frac{z}{U} = \frac{2}{\pi}$ miteinander verbunden sind.

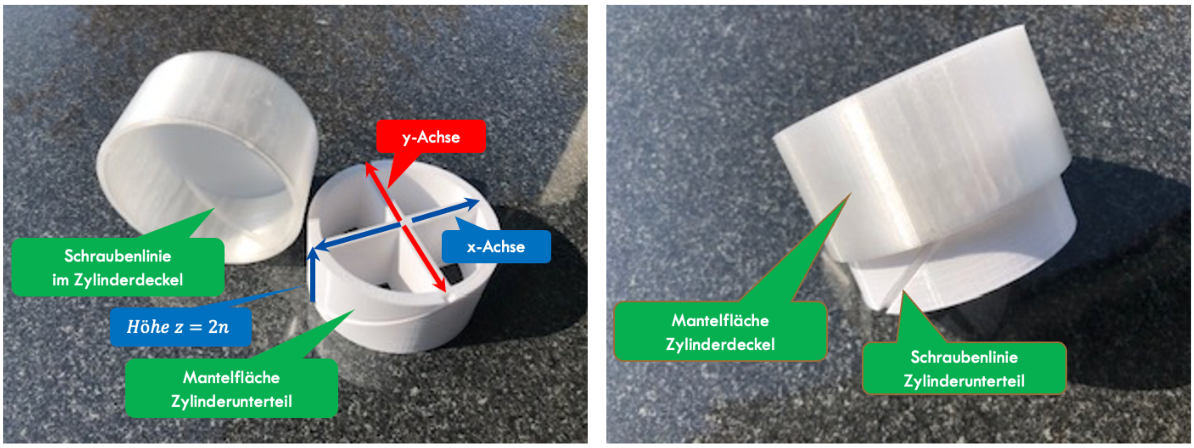


Bild 1: Eulerrolle, bestehend aus Zylinderdeckel und Zylinderunterteil

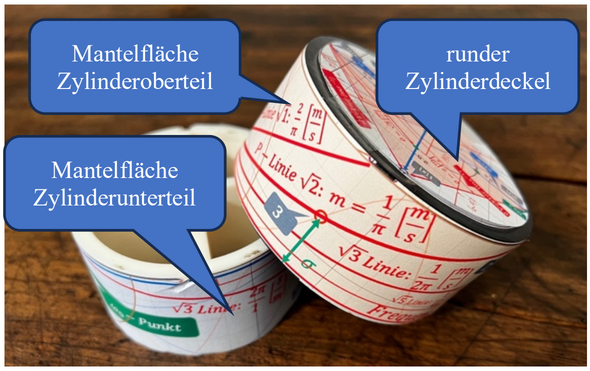
Das Zylinderunterteil kann als ein statisches 3D-Element mit den drei Raumdimensionen xyz interpretiert werden. Das abschraubbare Zylinderoberteil besitzt die gleiche Geometrie wie das Zylinderunterteil, wobei konstruktionsbedingt Abweichungen toleriert werden müssen (Wanddicke > 0). Wird das Zylinderoberteil um 90^0 gedreht, verdoppelt sich das Zylindervolumen und damit auch die gesamte Mantelfläche. Für die Mantelfläche des Zylinderunterteils gilt: $xy = U \cdot h \; (Umfang \cdot Höhe)$.
Die Mantelfläche des Zylinderoberteils kann durch ein Produkt $z \cdot t$ beschrieben werden. Die drei Dimensionen x, y und z beschreiben drei Raumdimensionen und der Faktor z eine Zeitdimension. Das Objekt *Eulerrolle* ist also ein 4-dimensionales Raum-Zeit-Objekt.

Der Begriff Objekt stammt aus der Topologie, einem jungen Teilgebiet der Mathematik. unterschiedlicher Richtung besteht. Jede kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten lässt sich daher als eindimensionale Vektor interpretieren, wobei die Richtung durch die Dimension (Einheit) bestimmt. Jeder Umweg von a nach b *(gekrümmte Line)* lässt sich folglich auf einen Vektor reduzieren, wobei in diesem Fall sämtliche Teilvektor-Richtungen auf eine einzige Richtung reduziert werden. Diese Reduktion auf eine Vektorbeschreibung ist eine Komplexitätsreduktion. Eine beliebig komplexen (mehrdimensionalen) Funktion kann so auf eine lineare Beziehung zurückgeführt werden. Toplogisch wird aber auch noch zwischen endlichen und unendlichen Systemen (Objekte) unterschieden, wobei für ein endliches System der Begriff *kompakten Mannigfaltigkeit* verwendet wird. Die Eulerrolle ist somit eine kompakte Mannigfaltigkeit, die durch einen Rand begrenzt ist. Wird diese Grenze überschritten, so zerfällt das Objekt in zwei Teile und verliert dabei auch spezifische Systemeigenschaften. Das ist der Fall, wenn der Zylinderdeckel um mehr als 90^0 gedreht wird, dann hat man keine Eulerrolle mehr in der Hand, sondern nur noch zwei Halbteile der Eulerrolle, wobei auch dies Halbteile weiter zerfallen können, nämlich in zwei 2D-Flächenobjekte, in eine Mantelfläche und eine kreisförmige Deckelfläche.

Dieser Zerfall hat den Vorteil, dass die Teilobjekte immer einfacher und damit auch besser verständlicher werden. Ausserdem bleiben bei der Zerlegung auch gewisse Eigenschaften des Systems erhalten, während andere verloren gehen. Zerfällt ein Zylinder-Objekt in zwei

Mantelflächen, so geht eine Raumdimension verloren und das Objekt kann nicht mehr als Behälter verwendet werden. Grundlegende Fragen ergeben sich, wenn auch noch eine Mantelfläche zerlegt wird. Topologisch ist eine Fläche eine *zwei Mannigfaltigkeit,* die durch einen Rand *(Umfanglänge)* begrenzt wird. Allgemein gilt: Der Rand einer Mannigfaltigkeit ist auch wieder eine Mannigfaltigkeit, die aber um eine Potenz kleiner ist, als die übergeordnete Mannigfaltigkeit *(Der Umfanglänge einer Mantelfläche ist eine 1D-Mannigflatig, die mit einer n^1-Zahl beschrieben werden kann).*

3. Die unterschiedlichen Flächen der Eulerrolle



Auf der Oberfläche der Eulerrolle können Vektoren, Strecken und Flächen gezeichnet werden. Dies sind alles mathematische Objekte, die durch eine Zahl definiert werden können. Allerdings gibt es zwischen diesen Flächen grundsätzliche Unterschiede, so dass ein Vektor auf der Mantelfläche des Zylinderoberteils nicht ohne weiteres auf eine andere Fläche übertragen werden kann.

Bild 2: Drei Mantelflächen, drei Zahlenräume

Der **Zylinderunterteil** wird als statisches 3D-Element interpretiert, so dass jeder Punkt auf dieser Oberfläche mit einen x- und y-Koordinatenwert beschrieben werden kann. Dieses statische Teilobjekt hat keine Zeitdimension. Auf dieser Mantelfläche kann auf der y-Achse eine Radiuslänge und auf der x-Achse eine Umfanglänge r· 2π dargestellt werden. Diese Fläche kann somit als Phasenraum-Darstellung $y = f(\varphi) = f(r\pi)$ interpretiert werden. Dabei kann der y- und der x-Dimension eine Länge $[m]$ zugeordnet werden.

Der **Zylinderoberteil** kann in ein runde **Deckelfläche** und eine **Mantelfläche** unterteilt werden. Die Deckelfläche stellt eine Polardarstellung dar, bei der ein Punkt auf der Fläche durch eine imaginäre Zahl definiert werden kann, die sich aus einem *realen x*- und durch einem *imaginären j*-Anteil zusammensetzt. Im Gegensatz zur Phasenraum-Darstellung wird jede Zahl in der Polardarstellung immer als skalare Zahl *(einheitslos)* dargestellt.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Zylinderoberteil und -unterteil besteht darin, dass das Oberteil kein statisches, sondern ein abschraubbares Element ist, das sich nach einer gewissen Drehzeit und Drehgeschwindigkeit vom Unterteil löst. Diese Mantelfläche kann daher als Produkt *zt* beschrieben werden, wobei die Vertikale z als *Hubhöhe h* und die Horizontale t als *Drehzeit t* interpretiert werden kann. Diese Fläche stellt also einen Zeitbereich $z = f(t)$ dar. Die Hubhöhe z kann als Längeneinheit $[m]$ interpretiert werden. Alternativ kann die Mantelfläche *zt* auch als Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f$ interpretiert werden, das heisst die Höhe z wird durch eine Frequenz $f\ [s^{-1}]$ und die Bogenlänge wird durch eine Zeit $r\pi\ [s]$ substituiert. Dabei gilt: Frequenz $f = \frac{1}{r} = \frac{Umdrehungen}{Zeiteinheit} = \overrightarrow{v_{ref}} = \frac{2\pi \cdot f}{2r} = \pi.$
Diese Darstellung ist als Fourierraum-Darstellung bekannt.

Jede Vektor- oder Flächen-Darstellung im Phasenraum kann durch eine Fouriertransformation in den Zeitbereich bzw. in den Fourierraum transformiert werden.
Solche Transformationen gehören zur höheren Mathematik.

(s. Literaturhinweis oder diverse youtube Beiträge, Suchbegriff: Fouriertransformation)

Wichtig ist an dieser Stelle:
Auf der Eulerrolle können drei verschiedene Zahlenräume dargestellt werden. Je nach Fragestellung eignet sich der eine oder andere Raum besser für bestimmte Operationen. So lohnt es sich, zunächst zu überlegen, welcher Zahlenraum sich für eine bestimmte Fragestellung am besten eignet. Dies kann den Vorteil haben, dass bestimmte Gleichungssysteme in einem Raum viel einfacher zu lösen sind als in einem anderen Raum. Hat man in einem Raum eine einfache Lösung gefunden, kann man das Ergebnis in jeden anderen Raum zurücktransformieren. Die Geometrie der Eulerrolle auf der eine Schraubenlinie mit der Steigung $m = \frac{D}{\pi} = \frac{2r}{\pi}$ liegt, ist so gewählt, dass bestimmte Differenzialgleichungen in der Polardarstellung im Zeitbereich einfach zu interpretieren sind, so dass die Lösungen wie auf einem Rechenschieber abgelesen werden können. Dies setzt allerdings die spezielle Geometrie der Eulerrolle voraus *(Patentschrift).*

4. Vor- und Nachteil der verschiedenen Zahlenräume

Jede beliebige Zahl k kann durch den Quotienten $\frac{k}{k}$ auf die Zahl 1 skaliert werden. Vorausgesetzt ist allerdings, dass k eine endliche Zahl ist, da $\frac{\infty}{1/\infty}$ eine undefinierte Bezugsgrösse ist *(gegen die Unendlich oder* $1/_\infty$ *kann nicht referenziert werden).*

Das bedeutet aber auch, dass ein beliebig grosses Raume-Zeit-Objekt $< \infty$ auf eine Eulerrolle reduziert werden kann. Diesem skalierten Objekt kann, wie dem 4D-Originalobjekt, ein 3D-Rand zuordnet werden, welcher kohärent zur 4D-Eulerrolle ist. *(Anmerkung zur Kohärenz: Eine Umfanglänge 4*n^1 *ist kohärent zu einer quadratischen Fläche 1*n^2*).* Dieser 3D-Rand ist eine Mannigfaltigkeit mit 2D-Rand *(Mantelfläche*) und diese wiederum eine Mannigfaltigkeit mit einem 1D-Rand *(Seitenlänge).* Die Höhe y der statischen Mantelfläche kann als 1D-Vektorobjekt mit definierter Länge und Richtung y interpretiert werden. Transformiert man diesen Längenvektor in der Polardarstellung, kann damit eine Durchmesserlänge darstellt werden. In der Polardarstellung, kann jedoch keine Länge und damit auch kein Vektor, sondern nur eine skalierte Zahl $n = \frac{r}{r} = \frac{x}{y} = 1$ dargestellt werden. Dabei kann diese Radiuslänge aus beliebig vielen Sublängen x= $\{a_1, a_1, a_1 \ldots a_{n/2}\}$ und beliebig vielen Sublängen y= $\{b_1, b_1, b_1 \ldots b_{n/2}\}$ bestehen. Diese Subterme lassen sich zu einem Realteil A_r und einem j-Imaginärteil B_j zusammenfassen.
Dabei gilt bei einer Polardarstellung: $\frac{A_r}{B_j} = \frac{Re}{Im} = \frac{1}{1} = n^1$

Hinter der Zahl n^1 kann sich also ein beliebig grosser (langer) Sehnenvektor verbergen, der sich aus sehr vielen Längen- und Phasenteile zusammensetzt. Im der Polardarstellung stellt ein 45^0-Sehenvektor das Verhältnis $\frac{Re}{Im} = \frac{1}{1} = n^1$ ab. Im Phasenraum wird ein solcher Vektor als Rechteckdiagonale mit einem y-Anteil $r = Radiuslänge\ Re$ und einer Bogenlänge $\varphi = r\pi$ *(Im-Anteil)* dargestellt. In dieser Darstellung bildet ein Sehnenvektor, eine Hypotenuse, die durch eine Steigung $m = \frac{Radius\ r}{Bogen\ r\pi} = \frac{1}{\pi}$ gekennzeichnet ist. Transformiert man diese Hypotenuse in den Zeitbereich, so stellt sie in dieser Darstellung einen Geschwindigkeitsvektor $\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{m}{s}\right]$ dar.
Das Beispiel zeigt, das sich mit der Eulerrolle ein Geschwindigkeitsvektor (Objekteigenschaft) auch auf einer rotierenden Manteloberfläche abbilden lässt. Ein solcher $\vec{v}$-Vektor lässt sich auch wieder in die Polardarstellung zurücktransformieren, wo er mit

einem anderen Winkel wieder als einheitenfreie Zahl dargestellt werden kann. Der Nachteil bei dieser einheitenfreien Darstellung liegt darin, dass ein Sehnenvektor in der Polardarstellung nicht ohne weiteres als $\overrightarrow{v_1}$-*Vektor* erkannt wird.

Der imaginäre Zahlenraum (Polardarstellung)

In dieser Darstellung können alle Zahlen durch einen einheitenlosen Vektor $r = n$ und einem Phasenwinkel $\varphi = k\pi$ dargestellt werden. Alternativ kann eine Zahl auch durch die Koordinatendarstellung x= Re und y=j=Im definiert werden. Mit der Skalierung $\frac{kn}{kn}$ kann jede beliebige Zahl $-\infty < k < +\infty$ als skalierter Vektor mit einer Radiuslänge $\frac{n}{n} = 1$ und einem Phasenwert $\frac{k\pi}{k} = \pi = 180^0$ darstellt werden. Es handelt sich um einen Radiusvektor, der auf der -x Achse des Einheitskreises liegt und eine skalierte Zahl -1 darstellt. Topologisch ist dieser Vektor ist ein eindimensionales Objekt n^1 mit einem n^0 Rand $\frac{n}{n} = 1$. Das heisst, in dieser Darstellung ist der Radiusvektor auf die Länge 1 beschränkt. Allerdings ist auch der Phasenwert $\frac{k\pi}{k} = \pi$ und damit der Vektorwinkel auf eine 180^0-Drehung beschränkt, so dass der Einheitskreis nicht vollständig mit einem Vektorobjekt dargestellt werden kann. Dies ändert sich, wenn zwei gleiche Vektorobjekte addiert werden. Zwei «-1 Vektoren» lassen sich als sich Summenvektor durch einen $R2\angle\pi$ beschreiben. Neben einer Vektorlänge 2 beschreibt dieser Vektor auch eine Halbkreisfläche $r^2\frac{\pi}{2} = 2 \cdot \pi$ und damit eine $Flächenzahl\ k^2$ bzw. eine zwei Mannigfaltigkeit (Fläche) mit einem k^1-Rand $(2r + \frac{2r\pi}{2})$ *(Durchmesserlänge + Halbkreisumfang).* Dieser Zusammenhang ist allgemein gültig und gilt für jede Kreisgrösse. D= $2r$. In jedem Kreis könnten, sofern genügend Elemente vorhanden sind, auch beliebig viele Kreisradien mit unterschiedlichen Vektorrichtungen *(Phasenwert φ*) dargestellt werden. Damit kann auch auf jedem Kreis eine 1 Zahl 1 (Radiuslänge) mit sehr grosser Potenz dargestellt werden. $(1^{\mathcal{M}};\mathit{wobei}\ \mathcal{M}\ \mathit{eine\ sehr\ grosse\ aber\ endliche\ Zahl\ ist}.$

Die Eulerrolle ist so dimensioniert, dass auf dem Kreisdeckel eine skalierte Durchmesserlänge D= 2r =2n dargestellt werden kann. Der Kreisumfang und damit auch die Mantelfläche *(Phasenraum)* ist damit auf eine Höhe *y=2n* und eine Breite *x=2nπ* begrenzt. Um die Eulerrolle mit Unter- und Oberteil konstruieren zu können, benötigt man also vier a_r-Teile und vier b_j-Teile, um eine skalierte Länge $D = \frac{2a_y}{2a_y}$ und vier j-Vektoren um einen skalierten Phasenwert $\varphi = \frac{2b_j\pi}{2b_j}$ = jπ darstellen zu können. Das sind insgesamt 8 Subelemente und damit können in der Polardarstellung vier Radiusvektoren konstruiert werden. Bei dieser S8-Systemgrösse ist eine maximale Radiuslänge r=2 möglich, was noch eine Phasenauflösung von $\varphi=180^0$ ermöglicht. *(werden die Subelemenete mit einem anderen* $\frac{A_r}{B_j}$ *Verhältnis zusammengestellt, kann die Radiuslänge verlängert und die Phasenauflösung verbessert werden oder umgekehrt).* Die Eulerrolle muss jedoch nicht auf 8 Subelemente beschränkt sein, wenn genügend Subelemente vorhanden sind, können mehr Radiusvektoren hinzugefügt werden, was die Phasenauflösung verbessert. Bei einem endlichen 2n-System kann die Vektorlänge immer auf $r = 1$ und auch der Phasenwinkel auf $\frac{r\varphi}{\varphi} = \frac{r \cdot r\pi}{r} = 1\pi$ skaliert werden. Das bedeutet, das ein Halbkreis-Objekt immer auf ein eindimensionales Vektorobjekt $R2\angle\pi$ = 1 reduziert werden kann, sofern mindestens acht Subelemente zur Verfügung stehen.

Die Winkelauflösung ist jedoch auch bei einem grossen System auf $\frac{180^0}{n}$ begrenzt. Das bedeutet, dass es keinen Radiusvektor Rn∠0 gibt. Die Bezeichnung Rn∠0 beinhaltet nur die

Information, dass es einen Vektorrand bzw. eine maximale Vektorlänge $\frac{n}{n} = 2^0 = 1$ gibt.
Das ist eine Länge mit unbekanntem Phasenwert und damit unbekannter Dimension *(Einheit)*.

Der Vorteil der Polardarstellung liegt in ihrer allgemein gültigen Formulierung. Jedes beliebig komplexe Objekt kann im Imaginären Zahlenraum jx beschrieben werden.
Dabei können beliebige *y=f(x)* Funktionen mathematisch beschrieben werden, wobei mit Differenzialgleichung $\frac{\partial y}{\partial x}$ auch die Schnittpunkte von Gleichungen höher Ordnung bestimmt werden können. Allerdings ist die Komplexität der Gleichungssysteme auch nicht begrenzt, womit jeder Computer überfordert werden kann. Der grosse Vorteil des imaginären Zahlenraums ist die Objektivierbarkeit aller Zahlen. Damit hat die Mathematik in jeder Disziplin ihre Gültigkeit. Für Handlungsempfehlungen, basierend auf mathematische Herleitungen, sind sie aber nur bedingt gesellschaftstauglich. Jedenfalls kann man 5G-Gegner kaum mit der *Maxwell-Gleichung* davon überzeugen, dass der Betrieb einer Antenne ein akzeptables Risiko darstellt.

Der Phasenraum (wird auch als Bildbereich bezeichnet)

Wie bereits erwähnt, wird auf der Eulerrolle der Phasenraum durch die skalierte Durchmesserlänge $y = D = r2$ und durch den $x = D\pi = 2\varphi$ begrenzt. Im Gegensatz zur Polardarstellung kann in diesem Bereich entlang der y-Richtung eine aufgefaltete Radiuslänge $R4$ als Vektorlänge *2r=2n* $[m]$ und entlang der x-Richtung ein abgewickelter Kreisumfang S4 als Bogenlänge $D\pi = 2\varphi\ [m]$ dargestellt werden. Jedem Punkt im Phasenraum kann somit eine Flächenzahl xy zugeordnet werden, die als Produkt «$Vektorlänge \cdot Phasenwert$" und damit als Radiusvektor R2n$\angle 2\varphi$ dargestellt werden kann. Da in der Polardarstellung jede Radiuslänge auf $\frac{n}{n} = 1$ skaliert ist, kann mit einer R1-Vektorlänge nur die Fläche $1 \cdot \pi$ dargestellt werden, was auf der Eulerrolle der Fläche eines Quadranten entspricht. Die ganze Fläche einer skalierten R1-Polardarstellung *(vier Quadrante)* kann durch einen R2$\angle\varphi$ Vektor abgebildet werden.

Ein solcher Vektor R2$\angle\varphi$ Vektor weist immer das Verhältnis $\frac{2A_r}{2B_j} = \frac{Re}{Im} = 1$ auf. Im Phasenraum bilden Rn-Radiusvektoren immer eine Rechteckfläche ab, welche durch einen 1D-Hypotenusenvektor c_B *(komplexer Sehnenvektor mit Re- und Im-Anteil)* begrenzt werden. Das ist ein dualer Sehnenvektor, welcher $\frac{n}{2}A_r$ und $\frac{n}{2}B_j$ Anteile ($\frac{A_r}{B_j} = \frac{1}{1}$) enthält. In der Polardarstellung ist das eine 45^0-Sehne mit $\frac{Re}{Im} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1}$, im Phasenraum dagegen eine Rechteckdiagonale die auf einer Linie mit der Steigung $m = \frac{1}{\pi}$ liegt. Dabei kann der Realteil dieser Sehne als skalierter $\sigma\ Wert = 1$ und der Imaginärteil als skalierter Phasenwert $\varphi = \frac{r\pi}{r}$ interpretiert werden. In der Mathematik ist diese Sehne als s=$(\sigma + j\pi)$ bekannt.
Der Phasenraum wird damit durch einen s-Vektor beschränkt, und zwar sowohl der Re-Anteil $A_r =$ r$[m]$ wie auch der Im-Anteil B_j =$\varphi[m]$. Das sind zwei unterschiedliche Längeneinheiten *(wie Meter und Fuss)* mit denen aber eine beliebig grosse Flächenzahl $n^2 = kr \cdot k\varphi$ dargestellt werden kann, Jede Sehne c_B lässt sich aber als lineare Funktion $y = f(r\varphi) = f(ab)$ darstellen. Das ist ein Sehnenvektor S2n welcher verschiedenen Steigungen *(Dimension)* dargestellt werden.

Jeder Sehnenvektor kann somit als n^1-Rand einer 2D-Kreissegmentfläche (*zwei Mannigfaltigkeit)* interpretiert werden. Dabei handelt es sich immer um ein statisches Element, da der Phasenraum keine Zeitdimension darstellen kann.

Im Phasenraum können daher Subelemente nur addiert aber nicht gedreht werden, da eine Drehung ein dynamischer Vorgang ist und immer eine Zeitdimension voraussetzt. Mit 8 Subelementen (4 Längen- und 4 Phasenteile) können verschiedene Vektoren kombiniert werden *(addiert oder subtrahiert)*. Wenn man davon ausgeht, dass ein R-Vektor immer aus gleich vielen Re- und Im-Anteilen bestehen muss, dann kann ein $R4\angle\varphi$ Vektor auch in zwei $skalierte\ \sigma$-Vektoren $R2\angle\varphi$ oder vier $R1\angle\varphi$-Vektoren aufgeteilt werden. Ein $R1\angle\varphi$-Vektoren stellt dann noch eine Zahl 0,5 dar und ein $R2\angle\varphi$ eine Radiuslänge 1. Ein Vektor, in der Polardarstellung liegt aber immer auf einer y-Achse weil er nicht gedreht werden kann. *(In der Polardarstellung liegt er hingegen auf der -x Achse). (Eine Drehung setzt eine Zeitdimension bzw. eine Multiplikation voraus).*

Der Zeitbereich und der Fourier-Raum.

Ein Phasenwert φ kann auch als 180^0-Winkel zwischen zwei Radiusvektoren und damit auch als Kreiskonstante $\frac{Kreisumfang}{Durchmesser} = \pi$ interpretiert werden. Dieser Quotient kann im Zeitbereich durch einen Sehnenvektor *(Mantelfläche des abschraubbaren Zylinderoberteils)* darstellt werden. Dabei kann ein Kreisdurchmesser als Mantelhöhe auf der vertikalen z-Achse und der Kreisumfang als Zeit t=2rπ auf einer horizontalen Zeitachse darstellt werden. Dieser Quotient wird also durch einem Sehnenvektor c_z dargestellt, der auf einer Linie mit der Steigung $\frac{2r}{2r\pi}$ liegt. Es handelt sich um eine verlängerte Bildbereich-Hypotenuse c_B, wobei jedoch die Sehne c_z keinen Längenvektor, sondern eine Geschwindigkeitsvektor $v_1\left[\frac{m}{s}\right]$ darstellt. Dieser Vektor ist in der Mathematik als s=$(\sigma + j\omega)$ Term bekannt. Dieser S-Vektor ist äquivalent zu einem $R2\angle\frac{\pi}{2}$ bzw. zu einem 2j-Vektor, welcher jedoch eine Fläche darstellt. Diese Vektorspitze eines s=$(\ \sigma + j\omega)$ Vektors schneidet sich mit dem skalierten Radiusvektor $R2_z\angle\frac{\pi}{2}$ im Punkt (z,t)=(2,2π). In der Polardarstellung wird diesem Punkt eine Zahl $2j$ zugeschrieben *(skalierte Radiuslänge* $\frac{1}{1}$ *und skalierter Phasenwert* $\frac{\pi}{\pi} = 1^{(Re+Im} = 1^1$).

Diesem Punkt kann also ein Realteil 1 und ein Imaginärteil 1 und damit eine skalierte Länge 1 und eine skalierte Zeit t=1 zugeschrieben werden. Die Basiszahl wird dabei durch den R2z-Vektor und der Exponent durch den Sehnenvektor s= $(\sigma + j\omega)$ dargestellt.

Dreht sich der Radiusvektor Vektor $R2_z\angle\frac{\pi}{2}$ weiter auf die -x Achse weiter, markiert er als $R2_z\angle\pi$ zum Zeitpunkt *t=2* die maximale Vektorlänge R2= $\frac{1}{1}$. Diese Markierung kann auch als Frequenz 1= $\frac{Phasenwert\ 2\pi}{Zeit\ 2}\left[\frac{1}{s}\right]$ interpretiert werden. Die Markierung *ft=2t* ist auch die Zeit, die ein Rn-Vektor benötigt, um sich um 360^0 (Phasenwert 2φ) zu drehen.

Ein Produkt *ft = zt* setzt aber auch voraus, dass es im System nebst einem Phasenraum auch einen Fourierraum und damit auch auch einen S-Vektor gibt, welcher die Geschwindigkeit $v_2 = 2\left[\frac{m}{s}\right]$ repräsentiert. Dieser S-Vektor liegt im Zeitbereich auf einer Linie mit der Steigung m=$\frac{2}{\pi}$. Auf der Eulerrolle besitzt die Schraubenlinie diese Steigung.

Der Punkt (z,t) = (4, 2π) auf der Mantelfläche des Oberteils kann daher auch als (f,t) Achse bezeichnet werden. Das heisst, die R4-Länge auf der z-Achse repräsentiert eine Frequenz f=2 ab und der Punkt 2π eine Phasenzeit $t_2 = 1$. Mit der unterschiedlichen Interpratation der z-Achse *(Länge bzw. Frequenz)* unterscheidet sich auch der Zeitbereich von Fourier-Raum.

5. Spezielle Zahlen und Vektoren auf der Oberfläche der Eulerrolle

Geometrisch unterscheiden sich die beiden Mantelflächen auf dem Zylinderoberteil und Zylinderunterteil nicht *(Ausnahme: konstruktiv bedingten Abweichungen)*.

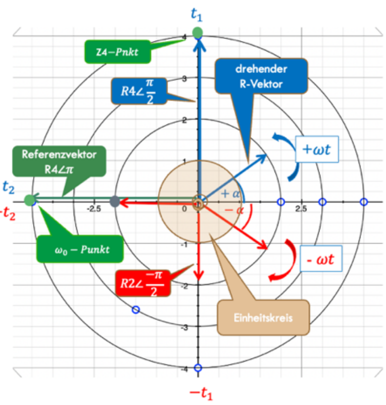
Der Gültigkeitsbereich der beiden Flächen beschränkt sich auch die Darstellung einer R4-Durchmesserlänge, welcher die Zahl 2 darstellen kann. Ein äquivalenter und damit zweiter (R2$\angle\varphi$) Vektor kann auch im Zeitbereich darstellt werden.

Der Rand dieser beiden Flächen wird dann durch einen komplexen S4n-Diagonalvektor dargestellt, wobei der Re-Anteil im Phasenraum und der Im-Anteil im Fourierraum dargestellt wird. Auf dieser Sehne können jedoch nur lineare Zusammenhänge und damit auch nur n^1Längen bzw. n^1-Zeiten dargestellt werden. Im Gegensatz zur Zeitdarstellung auf einem Kreisumfang *(Polardarstellung)* gibt es auf dieser 1D-Sehnenlänge (v_1*-Vektorlänge)* keine Überlagerungen von quadratischen Termen. Zudem werden 2n-Zahlen auf einem v_2-Vektor mit doppelter Steigung dargestellt und alle $v_{(1-\Delta t)}$-Vektoren liegen auf einer Sehne mit kleinerer Steigung. Alle Punkte auf einer solchen Sehne weisen eine Phasendominanz auf ($A_r < B_j$) und können somit keine Primzahl abbilden. Umgekehrt gilt auch:
Alle Primzahlen können mit einen v_1-Sehnenvektor dargestellt werden, für sie gilt:
Primsehne $v_1 = \frac{Re=Prim}{Im=Prim} = S2p^{(pRe+pIm)}$.
Wenn diese P-Sehne mit $\frac{p}{p}$ skaliert wird gilt: $2^{(1Re+1Im)} = 2^1$=Prim.
In der Polardarstellung ist dies eine Durchmessersehne, welche jedoch auch als -R2 Vektor die Durchmesserlänge des Einheitskreises darstellen kann.

Primcharakter hat auch die Zahl e. Diese Vektorlänge $\left\{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right\}$ nähert sich mit jeder Termen-Erweiterung die Summe der exakten Länge e an. Da jedoch nach jeder Erweiterung noch kleinere Δa-Sublängen dazu addiert werden, lässt sich die genaue e-Länge nur mit unendlich vielen Termen genau abbilden. Mit der Skalierung $\frac{e-\Delta}{e-\Delta} = \frac{k}{k}$ lässt sich diese Abweichung immer auf eine Radiusreferenzlänge 1 bzw. Referenzzeit 1 skalieren. Dieser Referenzvektor dient als Ausganslage für jedes n^1-Objekt. Die Zahlen 1, e und π lassen sich daher auf der Eulerrolle in allen Dimensionen *(Richtungen)* als skalierte Zahl 1=$\frac{e}{e}$ oder als Zahl 2 = $\frac{2e\pi}{e}$ als Term $\varphi = r\pi$ darstellen. Das Produkt $r\pi$ ist in diesem Fall als Wanderweglänge *Weg*Zeit* $[ms]$ zu verstehen.

Beschriftungsbeispiel für die Eulerrolle Oberfläche

Je nach Fragestellung können die Oberflächen der Eulerrolle unterschiedlich beschriftet werden. An dieser Kurzbeschreibung werden nur mögliche Beispiele abgebildet.



Für die entsprechenden Erklärungen wird auf die Angebote von Bildungsprojekte verwiesen.

Beschriftungsbeispiel Deckelfläche der Eulerrolle *(Polardarstellung)*

Um einen j-Vektor abbilden zu können, ist eine minimale Phasenauflösung von 90^0 erforderlich. Der dazu notwendige Kreisbogen muss mindesten eine Länge von $(r \cdot 2\pi)$ haben. Diese Bedingung erfüllt in der Polardarstellung ein R4$\angle\frac{\pi}{2}$-Vektor mit einer skalierten Länge $r^0 = \frac{2r}{2r} = \sigma$

Bild 3: Beschriftungsvariante Zylinderdeckel.

Beschriftungsbeispiel für untere und obere Mantelfläche der Eulerrolle

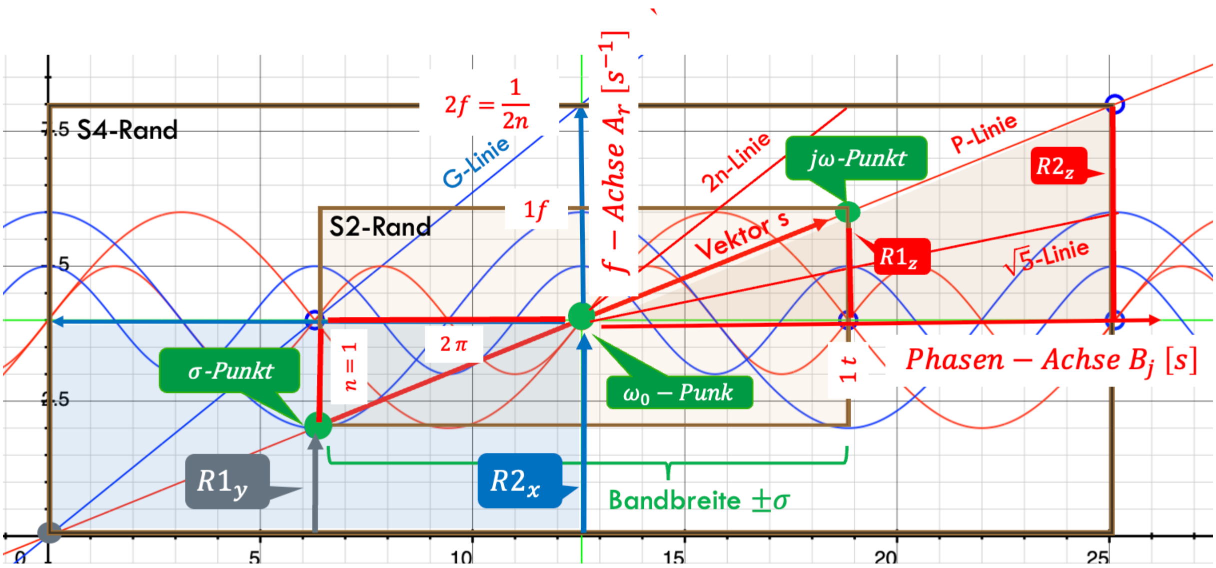


Bild 4: Phasenraumdarstellung (blau) mit komplexem Sehnenvektor s im Fourierraum.

Für eine weiterführende Erklärungen obiger Darstellung wird auf den Aufsatz **Primzahlen, π^2 und die Goldbachvermutung** verwiesen.

Die Eulerrolle ist als didaktisches Hilfsmittel gedacht und eignet sich nicht nur für den Mathematikunterricht. Auch viele Zusammenhänge aus dem Alltag lassen sich damit leichter erklären. Dazu gehört nebst Erkenntnissen zur Mathematik auch Erkenntnisse aus dem Bereichen Physik, Chemie aber auch zu betrieblichen Bildungskonzepten.

Die Eulerrolle können nur die skalierten Zahlen 1 bis 4 oder die Fläche 2^2darstgestellt werden. Das genügt aber, dass die Zahlen e und π als e^1 oder π^1 Vektorlänge dargestellt werden können.
Bei einer Systemgrösse S16 (16 Subelemente) können im Fourieraum auch zwei Geschwindigkeitsvektoren $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ und damit auch ein $\overrightarrow{\Delta v}$ abgebildet werden.
Bei einer besseren Auflösung (mehr als 16 Subelemente) können im Fourierraum auch kleine Phasenverschiebungen detektiert werden. Allerdings nur im Bereich zwischen den beiden Sehnenvektoren $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$. In der Mathematik ist dieser Raum auch als k-Raum bekannt *(Anwendungsbereich: Bildverarbeitung)*

Mathematische Anwendungsbeispiele

Zahlentheorie, besondere Zahlen
(Primzahlentheorie, σ, e und π aber auch $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ *und* $\sqrt{5}$
Die Gaussverteilung und Wahrscheinlichkeiten
Der Polyedersatz (E+F-K=2)
Der Goldene Schnitt ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)
Analysis; Fourier- und Laplace-Transformationen

Spezielle Aufsätze zu den oben erwähnten Themen sind vorgesehen.
Aktuell ist aber erst der Aufsatz «Primzahlen, π^2 und die Goldbachvermutung in einer Beta-Version verfügbar.
Weitere Angaben: www.bildungsprojekt.ch/mathematik

Hüttwilen, im März 2024
Hanspeter Zehnder